TITLE:

ガロア表現の変形に対する岩澤主予想とオイラー系について (代数的整数論とその周辺)

AUTHOR(S):

落合, 理

CITATION:

落合, 理. ガロア表現の変形に対する岩澤主予想とオイラー系について (代数的整数論とその周辺). 数理解析研究所講究録 2000, 1154: 10-21

ISSUE DATE:

2000-05

URL:

http://hdl.handle.net/2433/64134

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1154 巻 2000 年 10-21

ガロア表現の変形に対する岩澤主予想とオイラー系について

東京大学数理科学研究科　落合 理 (Ochiai, Tadashi)

CONTENTS

講演の際には時間の都合上あまり状況設定や正確なstatementには立ち入ることができなかった．本稿ではセルマー群や p-進 L 函数のより詳しい説明を与えるとともに紙数が許す限り証明について触れたいと思う．

以下この稿を通して素数 $p \geq 5$ を一つ固定するとともに有理数体 $\mathbb{Q}$ のある固定された代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の複素埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ と p-進埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定しておく．

1. INTRODUCTION

岩澤理論という思想は周知の通り５０年代の後半頃からの岩澤健吉氏による円分体のイデアル類群の研究にすべての端を発する理論である．この理論により円分体のイデアル類群やゼータ函数それぞれについて今まで以上のより深い理解が得られることとなったが，岩澤氏の思想は代数体などにとどまらず楕円曲線やモジュラー形式を含む一般にモチーフというものに対する岩澤理論としてより広い理論として拡張されることもその後の様々な人々の研究により明らかになってきた．８０年代終わりには p-進 L-函数の存在や円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大における岩澤予想などの枠組みがどうあるべきかということが予想として正確にまとまってきた（例えば [CP], [Gr1] 等を参照のこと）といえる．

一方で８０年代半ば頃からの肥田晴三氏による ordinary なヘッケ環の変形理論からの特に強い影響によって Mazur 氏によってガロア表現の変形理論が構築された．このガロア表現の変形理論はフェルマーの最終定理で大きな役割を演じたことが記憶に新しい．その後の人々の研究などをうけて Greenberg[Gr2] はこれまでの

イデアル類群やもっと一般のモチーフに対する円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大における岩澤理論をすべて含む形でさらに必ずしも体の無限次 p-進拡大からこないようなガロア表現の変形も含めた「Panchishkin type のガロア表現の変形に対する岩澤主予想」という新しい一般化を提唱している.

非常に粗く言うとまず適当な完備局所ネーター整域 $\mathcal{R}$ と $\mathcal{R}$ 上の適当なガロア表現 $\mathcal{T} \cong \mathcal{R}^{\oplus d} \curvearrowleft \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ に対してセルマー群 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{T} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}^{\vee})$ をガロアコホモロジーの局所自明な部分群として定義し, さらに $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{T} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}^{\vee})$ と p-進 L-函数との関係を予想している. より正確な状況や設定については後で今回の結果と関連した場合に限って詳しく説明したい.

ここではこの予想に対するオイラー系によるアプローチについて述べる. 特に肥田理論から得られる 2 変数のガロア表現のモジュラーな変形に対して Kato elements と呼ばれるものを用いて得られるこの場合の岩澤主予想に関する結果を紹介する.

2. 2-変数のモジュラーガロア変形

少し notation を準備する. 2 変数のガロア表現の変形を与えるためにまず $\Gamma_{\mathrm{c}}, \Gamma_{\mathrm{d}}$ という 2 つの pro-p 群を導入する. Γ_{c} は円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 $\mathbb{Q}_{\infty}/\mathbb{Q}$ のガロア群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\infty}/\mathbb{Q})$ とする. Γ_{d} はアファインモジュラー曲線のレベルの巾に関する塔 $\cdots \longrightarrow Y_1(p^{t+1})_{/\mathbb{Q}} \longrightarrow Y_1(p^t)_{/\mathbb{Q}} \longrightarrow \cdots$ 上の diamond 作用素のなす群の p-Sylow 部分群とする. アファインモジュラー曲線 $Y_1(p^t)$ は楕円曲線 E と E 上の p^t-torsion point の組 (E, e) を分類していることを思い出そう. このとき $Y_1(p^t)$ 上の diamond 作用素 $\langle a \rangle$ とは組 (E, e) を組 (E, ae) (ここで $a \in (\mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z})^{\times}$) へとうつす $Y_1(p^t)$ 上の自己同型をいう. $Y_1(p^{t+1})$ 上の diamond 作用素たちのなす群の p-Sylow 部分群 $\Gamma_{\mathrm{d},t} \cong \mathbb{Z}/p^t\mathbb{Z}$ を考え pro-p 群 Γ_{d} をそれらの逆極限 $\varprojlim_t \Gamma_{\mathrm{d},t}$ として定義する.

以上の 2 つの群 Γ_{c} と Γ_{d} は標準同型 $\kappa_{\mathrm{c}} : \Gamma_{\mathrm{c}} \xrightarrow{\sim} 1 + p\mathbb{Z}_p$, $\kappa_{\mathrm{d}} : \Gamma_{\mathrm{d}} \xrightarrow{\sim} 1 + p\mathbb{Z}_p$ をもつ.

定義 2.1. $\kappa_{\mathrm{c}} : \Gamma_{\mathrm{c}} \overset{\sim}{\to} 1 + p\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ (resp. $\kappa_{\mathrm{d}} : \Gamma_{\mathrm{d}} \overset{\sim}{\to} 1 + p\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$) を上述の標準同型 κ_{c} (resp. κ_{d}) から定まる指標とする. このとき指標 $\eta : \Gamma_{\mathrm{c}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ (resp. $\eta' : \Gamma_{\mathrm{d}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$) が数論的であるとは, ある整数 $w(\eta)$ (resp. $w(\eta')$) と Γ_{c}(resp. Γ_{d}) の有限位数の指標 χ (resp. χ') があって η (resp. η') が $\eta = \kappa_{\mathrm{c}}^{w(\eta)}\chi$ (resp. $\eta' = \kappa_{\mathrm{d}}^{w(\eta')}\chi'$) となることをいう. この整数 $w(\eta)$ (resp. $w(\eta')$) を η (resp. η') の重さと呼ぶことにする.

$f \in \sum_n a_n q^n \in S_k(\Gamma_1(Np), \psi; \mathbb{Q}_p)$ を重さが $k \geq 2$ でレベルが Np の正規化された固有カスプ形式とする．このような f に対しては Deligne[De2] によって付随する既約ガロア表現 $T_f \cong \mathbb{Z}_p^{\oplus 2} \curvearrowleft^{\rho_f} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\Sigma_{Np}}/\mathbb{Q})$ で各素数 $l \nmid Np$ での幾何的フロベニウス Frob_l のトレース $\mathrm{Tr}(\rho_f(\mathrm{Frob}_l))$ が a_l と一致するようなものが構成されている．

以下この論説を通して次の３つの条件を仮定しておく:

仮定 2.2. 1. カスプ形式 f の p-次 Fourier 係数 a_p が p-進単数となる．

2. mod p 表現 $T_f/pT_f \curvearrowleft^{\overline{\rho}_f} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\Sigma_{Np}}/\mathbb{Q})$ は既約．
3. f とは異なる重さが $k \geq 2$ でレベルが Np の正規化された固有カスプ形式 $f' \in \sum_n a_n q^n \in S_k(\Gamma_1(Np), \psi; \mathbb{Q}_p)$ で $T_f \not\cong T_{f'}$ かつ $T_f/pT_f \cong T_{f'}/pT_{f'}$ となるようなものが存在しない．

肥田氏によって次のような結果が得られている:

定理 2.3 (Hida, [H1],[H2]). $f \in \sum_n a_n q^n \in S_k(\Gamma_1(Np), \psi; \mathbb{Q}_p)$ を仮定 *2.2* を満たすような重さが $k \geq 2$ でレベルが Np の正規化された固有カスプ形式とする．このとき階数２の自由 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{d}}]]$-加群 $\mathcal{T}_{\mathrm{d}}$ で連続かつ既約な $G_{\mathbb{Q}}$-作用 $\mathcal{T}_{\mathrm{d}} \overset{\rho_{\mathrm{d}}}{\curvearrowleft} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\Sigma_{Np}}/\mathbb{Q})$ で次の条件を備えたものが存在する*:*

1. 表現 ρ_{d} は Np の外で不分岐．
2. 指標 $\kappa_{\mathrm{d}}^{k-2}$ で特殊化した表現 $\mathcal{T}_{\mathrm{d}} \otimes_{\mathcal{R}_{\mathrm{d}}} \mathcal{R}_{\mathrm{d}}/(\gamma_{\mathrm{d}} - \kappa_{\mathrm{d}}^{k-2}(\gamma_{\mathrm{d}}))$ は元の表現 T_f と同型．
3. 重さ $l-2$ の勝手な数論的指標 $\eta' = \kappa_{\mathrm{c}}^{l-2}\chi'$ (l は２以上の整数，χ' は Γ_{d} の有限位数の指標) を考える．このとき重さ l でレベルが Np の正規化された固有カスプ形式 $f_{\eta'} \in S_l(\Gamma_1(Np^{s(\psi\chi'\omega^{k-l})}), \psi\chi'\omega^{k-l})$ が存在して $\mathcal{T}_{\mathrm{d}} \otimes_{\mathcal{R}_{\mathrm{d}}} \mathcal{R}_{\mathrm{d}}/(\mathrm{Ker}(\mathrm{Sp}_{\eta'}))$ が $f_{\eta'}$ に付随するガロア表現 $T_{f_{\eta'}}$ と同型になる．ここで $s(\psi\chi'\omega^{k-l})$ は指標 $\psi\chi'\omega^{k-l}$ の導手の *p-order* とする．

ガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ の指標 $\widetilde{\kappa}_{\mathrm{c}}$ を $G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \Gamma_{\mathrm{c}} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{c}}]]^\times$ で定める（ここで２番目の写像は tautological な単射写像とする）．今 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{c}}]]$ 上階数１のガロア表現 $\mathcal{T}_{\mathrm{c}}$ を $G_{\mathbb{Q}}$ が指標 $\widetilde{\kappa}_{\mathrm{c}}$ によって作用するようなガロア表現として定義する．これによって２変数のガロア変形 $\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}}$ を formal tensor product $\mathcal{T}_{\mathrm{c}} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{T}_{\mathrm{d}}$ として定義する．２変数の完備群環 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{c}} \times \Gamma_{\mathrm{d}}]]$ を $\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$ とすると，$\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}}$ は $\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$ 上自由かつ階数２の加群となる．

定理 2.3 の２よりまず $\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}}$ は元の表現 T_f の変形である．また定理 2.3 の３より $\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}}$ は適当な Γ_{c} と Γ_{d} の数論的指標の組 (η, η') で特殊化するごとにある classical なカスプ形式 $f_{\eta'}$ の表現 $T_{f_{\eta'}}$ の Γ_{c} の指標 η による twist があらわれるようなガロア表現の変形を与えている．

3. セルマー群と p-進 L-函数

前節で定義されたような2変数のガロア表現の変形に対してセルマー群と p-進函数という二つの大事な対象が定義される.

Mazur-Wiles (see [Wi] Theorem 2.2.2) によって表現 $\mathcal{T}_{\mathrm{d}}$ は p での分解群 D_p の表現としてのフィルトレーション:

$$0 \longrightarrow \mathrm{F}^+\mathcal{T}_{\mathrm{d}} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{d}} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{d}}/\mathrm{F}^+\mathcal{T}_{\mathrm{d}} \longrightarrow 0$$

で次のような条件を満たすようなものをもつ:

1. $\mathrm{F}^+\mathcal{T}_{\mathrm{d}}$ と $\mathcal{T}_{\mathrm{d}}/\mathrm{F}^+\mathcal{T}_{\mathrm{d}}$ はともに $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{d}}]]$ 上の階数の自由加群となる.
2. $\mathrm{F}^+\mathcal{T}_{\mathrm{d}}$ は不分岐な D_p-加群で, p での幾何的フロベニウス Frob_p の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{F}^+\mathcal{T}_{\mathrm{d}}) \cong \mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{d}}]]^\times$ への像 $A_p \in \mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{d}}]]^\times$ を重さが $w(\eta') \geq 0$ の Γ_{d} の各数論的指標 η' で特殊化すると $f_{\eta'} = \sum_{0<n<\infty} a_{\eta',n}q^n$ の p-Fourier 係数 $a_{\eta',p}$ となる.

上のフィルトレーションを用いて, 2変数のガロア表現 $\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}}$ に対しても D_p-加群としてのフィルトレーションを $\mathrm{F}^+\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}} := \mathcal{T}_{\mathrm{c}}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{F}^+\mathcal{T}_{\mathrm{d}}$ で定義する. またこれによって $\mathcal{A}_{\mathrm{c,d}} = \mathcal{T}_{\mathrm{c,d}} \otimes_{\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}} \mathcal{R}^\vee_{\mathrm{c,d}}$ のフィルトレーション $\mathrm{F}^+\mathcal{A}_{\mathrm{c,d}} \subset \mathcal{A}_{\mathrm{c,d}}$ を $\mathrm{F}^+\mathcal{A}_{\mathrm{c,d}} = \mathrm{F}^+\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}} \otimes_{\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}} \mathcal{R}^\vee_{\mathrm{c,d}}$ として定義する.

$\mathbb{Q}$ の各有限素点 v に対して I_v を v での惰性部分群とする. Greenberg のアイデアに従ってセルマー群 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})$ を次の局所条件で定義する:

$$\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{A}_{\mathrm{c,d}}) = \mathrm{Ker}\left[H^1(\mathbb{Q}_{\Sigma_{Np}}/\mathbb{Q}, \mathcal{A}_{\mathrm{c,d}}) \longrightarrow \bigoplus_{l|N} H^1(I_l, \mathcal{A}_{\mathrm{c,d}}) \oplus H^1(I_p, \mathcal{A}_{\mathrm{c,d}}/\mathrm{F}\mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})\right].$$

セルマー群 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})$ の Pontrjagin 双対 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})^\vee$ が $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{c}} \times \Gamma_{\mathrm{d}}]]$-加群として有限生成であることは容易に確かめられる.

一方で, p-進 L-函数 $\mathcal{L}_p(\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}})$ は Greenberg-Stevens, 北川氏, 太田氏によって独立に構成されている ([GS], [Ki] などを参照のこと). この $\mathcal{L}_p(\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}}) \in \mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$ は, Γ_{c}, Γ_{d} の各数論的指標 $\eta = \kappa_{\mathrm{c}}^j\chi$, $\eta' = \kappa_{\mathrm{d}}^{k-2}\chi'$ で $1 \leq j \leq k-1$ となるようなものを与えるごとに

$$\frac{\mathrm{Sp}_{\eta,\eta'}(\mathcal{L}_p(\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}}))}{C^+_{p,(\eta,\eta')}} = \frac{(j-1)!G(\chi^{-1}\omega^j, \zeta_{p^{s(\chi\omega^{-j})}})}{C^+_{\infty,(\eta,\eta')}} \left(\frac{a_{\eta',p}}{p^{j-1}}\right)^{-s(\chi\omega^{-j})}$$
$$\times \left(1 - \frac{\chi\omega^{-j}(p)a_{\eta',p}}{p^{j-1}}\right) L(f_{\eta'}, \chi\omega^{-j}, j)$$

という interpolation property によって特徴付けられる．ここで, $\mathrm{Sp}_{\eta,\eta'}$ は η,η' に付随する環準同型 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{c}},\Gamma_{\mathrm{d}}]] \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p,\ \gamma_{\mathrm{c}} \longmapsto \eta(\gamma_{\mathrm{c}}), \gamma_{\mathrm{d}} \longmapsto \eta'(\gamma_{\mathrm{d}})$ とする．$C^+_{p,(\eta,\eta')} \in \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$, $C^+_{\infty,(\eta,\eta')} \in \mathbb{C}$ はそれぞれ p-進周期, 複素周期であり, interpolation property の両辺は代数的数同志の等式となっていることに注意したい．

4. 主結果

前節で与えられたような状況においては Greenberg 氏によって次のように主予想が考えられている．

岩澤主予想 (Greenbeg, [Gr2]). 1. セルマー群の *Pontrjagin* 双対 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q},\mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})^\vee$ は *torsion* $\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$-加群となる．

2. $\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$ の各高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$ に対して，

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{L}_p(\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}})) = \mathrm{length}_{(\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}})_{\mathfrak{p}}}\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q},\mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})^\vee \otimes_{\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}} (\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}})_{\mathfrak{p}}.$$

定理 4.1. 次の条件 $(\mathbf{SL}_d)$ を仮定しよう．
$(\mathbf{SL}_d)$ $\rho_d:\ \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{\Sigma_{Np}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_{\mathrm{d}}) \cong GL_2(\mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{d}}]])$ の像が $SL_2(\mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{d}}]])$ を含む．
このとき次が成り立つ．

(1) セルマー群の *Pontrjagin* 双対 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q},\mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})^\vee$ は *torsion* $\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$-加群となる．

(2) $\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$ の各高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$ に対して，

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{L}_p(\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}})) \geq \mathrm{length}_{(\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}})_{\mathfrak{p}}}\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q},\mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})^\vee \otimes_{\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}} (\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}})_{\mathfrak{p}}.$$

Remark 4.2. 上の定理における条件 $(\mathbf{SL}_d)$ に関しては例えば論文 [MW] の Boston による Appendix に十分条件が与えられている．具体的には書かないがそれによってかなり一般の場合に $(\mathbf{SL}_d)$ が満たされることがわかる．

証明の柱となるのは主に

1. オイラー系の議論によるセルマー群の bound（定理 A）．
2. Coleman 写像を用いた dual exponential 写像の p-進補間（定理 B）．

の２つである．以下の節でこれらについて説明していきたい．

5. Kato elements と オイラー系

オイラー系の手法においてはガロアコホモロジーの Global duality theorem によってセルマー群の位数をおさえていくのであるが先のセルマー群 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q},\mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})$

はガロアコホモロジーの双対定理との相性があまりよくないため, もう少し双対定理と相性のよい別のセルマー群を使って議論をすすめていく. まずそれらについて少し説明する.

$1 \le j \le k-1$ となるような整数の組 (j,k) をひとつ固定する. このとき各 $s,t \ge 0$ が与えられるごとに $\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$ の高さ2のイデアル $\Phi_{s,t}^{(j,k)} \subset \mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$ を $\Phi_{s,t}^{(j,k)} = (\gamma_{\mathrm{c}}^{p^s} - \kappa_{\mathrm{c}}^{jp^s}(\gamma_{\mathrm{c}}), \gamma_{\mathrm{d}}^{p^t} - \kappa_{\mathrm{d}}^{(k-2)p^t}(\gamma_{\mathrm{d}}))$ で定義する. 有限ガロア加群 $A_{s,t,n}^{(j,k)}$ を $\mathcal{A}_{\mathrm{c,d}}[\Phi_{s,t}^{(j,k)}, p^n]$ で定める. このとき, Bloch-Kato の方法によってセルマー群 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}(\mathbb{Q}, A_{s,t,n}^{(j,k)})$ を

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}(\mathbb{Q}, A_{s,t,n}^{(j,k)}) \\
&\quad = \mathrm{Ker}\left[H^1(\mathbb{Q}_{\Sigma_{Np}}/\mathbb{Q}, A_{s,t,n}^{(j,k)}) \longrightarrow \bigoplus_{l|N} \frac{H^1(\mathbb{Q}_l, A_{s,t,n}^{(j,k)})}{H^1_f(\mathbb{Q}_l, A_{s,t,n}^{(j,k)})} \oplus \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, A_{s,t,n}^{(j,k)})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, A_{s,t,n}^{(j,k)})} \right].
\end{aligned}
$$

と定める. ここで各素点 v ごとに $H^1_f(Q_v, A_{s,t,n}^{(j,k)}) \subset H^1(Q_v, A_{s,t,n}^{(j,k)})$ を Bloch-Kato[BK] によって定義された finite part とする. 今この有限セルマー群 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}(\mathbb{Q}, A_{s,t,n}^{(j,k)})$ の順極限 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}_{(j,k)}(\mathbb{Q}, \mathcal{A}_{\mathrm{c,d}}) := \varinjlim_{s,t,n} \mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}(\mathbb{Q}, A_{s,t,n}^{(j,k)})$ を考える. Flach による局所ガロアコホモロジーの比較定理 [Fl] と極限計算を行うことによって次がわかる:

補題 5.1. (1) 勝手な $1 \le j \le k-1$ ごとに $\mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}_{(j,k)}(\mathbb{Q}, \mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})$ は $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})$ の部分群となる.

(2) さらに $j \neq k-1$ ならば $\mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}_{(j,k)}(\mathbb{Q}, \mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})$ は $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q}, \mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})$ と一致する.

この補題によって, 以下では適当な (j,k) の組を1個選んで証明をすすめていけばよい. クンマー双対 $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}}(\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}}, \mathcal{R}_{\mathrm{c,d}})(1)$ に対しその $\Phi_{s,t}^{(j,k)}$ での特殊化 $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}} \otimes_{\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}} \mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}/\Phi_{s,t}^{(j,k)}$ を $\overline{T}_{s,t}^{(j,k)}$ と記す. また Γ_{c} (resp. Γ_{d}) の指標 η (resp. η') での特殊化 $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}} \otimes_{\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}} \mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}/\mathrm{Ker}(\mathrm{Sp}_{\eta,\eta'})$ を $\overline{T}_{\eta,\eta'}$ と記し, $\overline{T}_{\eta,\eta'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ を $\overline{V}_{\eta,\eta'}$ と記す.

命題 5.2. *notation* 等は先の通りとする. 剰余表現 $G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathcal{T}_{\mathrm{d}}/\mathfrak{M}_{\mathrm{d}}\mathcal{T}_{\mathrm{d}})$ が既約であると仮定しよう（ここで $\mathfrak{M}_{\mathrm{d}}$ は $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{d}}]]$ の極大イデアル）. $1 \le j \le k-1$ であるような整数の組 (j,k) を固定しておく. このとき次の条件を満たすようなコホモロジー類の集合（オイラー系）

$$
\mathcal{Z}^{(j,k)} = \left\{ z_{s,t}^{(j,k)}(r) \in H^1(\mathbb{Q}(\zeta_r), \overline{T}_{s,t}^{(j,k)}) \right\}_{r,s,t}
$$

が存在する（ここで r は p と素な *squarefree* な自然数を走り s,t は *non-negative* な整数たちをわたる）:

1. 各整数 $s,t\geq 0$ と各 *squarefree* な自然数 r ごとに, $z_{s,t}^{(j,k)}(r)\in H^1(\mathbb{Q}(\zeta_r),\overline{T}_{s,t}^{(j,k)})$ は $H^1(\mathbb{Q}(\zeta_r)_{\Sigma_p}/\mathbb{Q}(\zeta_r),\overline{T}_{s,t}^{(j,k)})\subset H^1(\mathbb{Q}(\zeta_r),\overline{T}_{s,t}^{(j,k)})$ に含まれる.
2. 各 *non-negative* な整数の組 $s,t\geq 0$, 素数 q, *squarefree* な自然数 rq ごとに, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Cor}_{\mathbb{Q}(\zeta_{rq})/\mathbb{Q}(\zeta_r)}(z_{s,t}^{(j,k)}(rq))={}_qP_{s,t}^{(j,k)}(\mathrm{Frob}_q)(z_{s,t}^{(j,k)}(r)),$$

但し ${}_qP_{s,t}^{(j,k)}(x)\in\mathbb{Z}_p[x]$ は固有多項式 $\det(1-\mathrm{Frob}_q x;(T_{s,t}^{(j,k)})^{I_q})$ とする.
3. $(s',t')\geq(s,t)$ となる (s,t), (s',t') を考える. このとき, ノルム写像:

$$H^1(\mathbb{Q}(\zeta_r),\overline{T}_{s',t'}^{(j,k)})\longrightarrow H^1(\mathbb{Q}(\zeta_r),\overline{T}_{s,t}^{(j,k)})$$

is $z_{s,t}^{(j,k)}(r)$ の下での $z_{s',t'}^{(j,k)}(r)\in H^1(\mathbb{Q}(\zeta_r),\overline{T}_{s',t'}^{(j,k)})$ の像は $z_{s',t'}^{(j,k)}(r)$ に等しい.
4. $1\leq j\leq k-1$ となるような Γ_{c} *(resp.* Γ_{d}*)* の各数論的指標 $\eta=\kappa_{\mathrm{c}}^j\chi$ *(resp.* $\eta'=\kappa_{\mathrm{d}}^{k-2}\chi'$*)* に対して,

$$\exp^*(z_{\eta,\eta'}(1))/C^+_{p,(\eta,\mathfrak{p})}=L_{(\mathfrak{p})}(\mathcal{F}_{/\eta'},j,\chi\omega^{-j})/C^+_{\infty,(\eta,\mathfrak{p})}\cdot\delta^+_{(\eta,\eta')}$$

が成り立つ. ここで, $\exp^*:\dfrac{H^1(\mathbb{Q}(\zeta_r),\overline{T}_{s,t}^{(j,k)})}{H^1_f(\mathbb{Q}(\zeta_r),\overline{T}_{s,t}^{(j,k)})}\longrightarrow\mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\overline{V}_{\eta,\eta'})$ を *dual exponential map*, $\delta^+_{(\eta,\eta')}$ は $\mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\overline{V}_{\eta,\eta'})$ の $\overline{\mathbb{Q}}$*-structure* の *base* とする.

商 $\overline{T}_{s,t}^{(j,k)}/\overline{T}_{s,t}^{(j,k)}$ を $\overline{T}_{s,t,n}^{(j,k)}$ とおこう.

補題 5.3. 逆極限 $\varprojlim_{s,t,n}\dfrac{H^1(\mathbb{Q}_p,\overline{T}_{s,t,n}^{(j,k)})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p,\overline{T}_{s,t,n}^{(j,k)})}=\varprojlim_{s,t}\dfrac{H^1(\mathbb{Q}_p,\overline{T}_{s,t}^{(j,k)})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p,\overline{T}_{s,t}^{(j,k)})}$ は *torsion-free* で *generic rank one* の $\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$-加群となる.

次節で説明する Coleman 写像によって次がわかる.

補題 5.4. 極限 $\varprojlim_{s,t}z_{s,t}^{(j,k)}(1)\in\varprojlim_{s,t}\dfrac{H^1(\mathbb{Q}_p,\overline{T}_{s,t}^{(j,k)})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p,\overline{T}_{s,t}^{(j,k)})}$ は *non-zero* である.

定理 A . *notation* 等は先の通りとし, 条件 $(\mathbf{SL}_d)$ を仮定しよう. また $1\leq j\leq k-1$ となるような整数の組 (j,k) をうまく選び固定しておく. このとき次がわかる.

(1) セルマー群の *Pontrjagin* 双対 $\mathrm{Sel}^{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Q},\mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})^\vee$ は *torsion* $\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$-加群となる.

(2) $\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$ の各高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$ に対して,

$$\mathrm{length}_{(\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}})_{\mathfrak{p}}} \mathrm{Sel}^{\mathrm{BK}}_{(j,k)}(\mathbb{Q}, \mathcal{A}_{\mathrm{c,d}})^{\vee} \otimes_{\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}} (\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}})_{\mathfrak{p}}$$
$$\leq \mathrm{length}_{(\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}})_{\mathfrak{p}}} \left(\varprojlim_{s,t,n} \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t,n})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t,n})} \Big/ \varprojlim_{s,t,n} z^{(j,k)}_{s,t,n}(1) \right) \otimes_{\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}} (\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}})_{\mathfrak{p}}.$$

となる.

Remark 5.5. 上の定理においてうまい (j,k) を選ぶという部分は正確に述べなかった. これは補題 5.1 にあらわれた条件の他にもオイラー系の twisting とよばれる操作によってうまく選ぶ必要があるが話が少し煩雑なので説明しないことにする. 実際, 最終結果にはよい (j,k) がひとつでもとれればよい. 詳しくは [O] を参照していただきたい.

証明には s,t,n ごとに Cebotarev の密度定理を使って r をうまく選び帰納法をすすめていく. 今, s,t,n を fix しよう. r' を pN と素な自然数とする. ガロアコホモロジーの global duality によって次の完全列がある.

$$H^1(\mathbb{Q}_{\Sigma_{pr'}}/\mathbb{Q}, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t,n}) \xrightarrow{a_{s,t,n}(r')} \bigoplus_{q|r'} \frac{H^1(\mathbb{Q}_q, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t,n})}{H^1_f(\mathbb{Q}_q, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t,n})} \oplus \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t,n})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t,n})}$$
$$\longrightarrow \mathrm{Sel}(\mathbb{Q}, A^{(j,k)}_{s,t,n})^{\vee} \longrightarrow \mathrm{Sel}_{\Sigma_{pr'}}(\mathbb{Q}, A^{(j,k)}_{s,t,n})^{\vee} \longrightarrow 0.$$

十分多くの素因子をもつ (s,t,n に依存する) square-free な自然数 r をうまく選ぶことで, $\mathrm{Sel}_{\Sigma_{pr}}(\mathbb{Q}, A^{(j,k)}_{s,t,n})^{\vee} = 0$ としてよい. また, Kolyvagin derivative と呼ばれる操作により, r の各因子 $r'|r$ ごとに $z^{(j,k)}_{s,t,n}(r') \in H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{r'}), \overline{T}^{(j,k)}_{s,t,n})$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{r'})/\mathbb{Q})$-不変部分に入ることが示される. $\kappa^{(j,k)}_{s,t,n}(r') \in H^1(\mathbb{Q}, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t,n})$ を $z^{(j,k)}_{s,t,n}(r')$ の制限写像による引き戻しとする. $r' = 1$ のときには $\kappa^{(j,k)}_{s,t,n}(1)$ は $z^{(j,k)}_{s,t,n}(1)$ と等しいことに注意する. 各 $r'|r$ に対して $C(r')_{s,t,n} = \bigoplus_{q|r'} \frac{H^1(\mathbb{Q}_q, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t,n})}{H^1_f(\mathbb{Q}_q, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t,n})} \oplus \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t,n})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t,n})}$ とおく. 上で説明した Global duality theorem によって, 次のことがわかっている.

1. $\mathrm{Coker}(a_{s,t,n}(r))$ は $\mathrm{Sel}(\mathbb{Q}, A^{(j,k)}_{s,t,n})^{\vee}$ と同型
2. $\mathrm{Coker}(a_{s,t,n}(r))$ は $C(r)_{s,t,n}/\langle a_{s,t,n}(r)(\kappa^{(j,k)}_{s,t,n}(r))\rangle$ の商となる.

最終的には $C(1)_{s,t,n}/\langle a_{s,t,n}(1)(\kappa^{(j,k)}_{s,t,n}(1))\rangle$ を用いて $\mathrm{Sel}(\mathbb{Q}, A^{(j,k)}_{s,t,n})^{\vee}$ の大きさをおさえたい. 帰納的に r' のときと $r'q$ のときの大きさを比べていく議論が必要となる. r をうまく選んで $r'|r$ の素因子を増やしていくときに $C(r')_{s,t,n}/\langle a_{s,t,n}(r')(\kappa^{(j,k)}_{s,t,n}(r'))\rangle$ た

ちの大きさを比べていくのがオイラー系の議論の核心である．紙数も限られているためここでは詳細を省略する．

6. Coleman 写像

定義 6.1. 階数 1 の自由 $\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$-加群 $\mathrm{D}(\mathrm{F}^+\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}})$ を $\mathbb{Z}_p[[\Gamma_{\mathrm{c}}]]\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}(\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\mathrm{ur}}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{F}^+\mathcal{T}_{\mathrm{d}})^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ と定義する．ここで $\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}$ は $\mathbb{Z}_p$ 上での formal tensor product を表すとする．また階数 1 の自由 $\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$-加群 $\mathrm{D}(\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}}/\mathrm{F}^+\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}})$ を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}}(\mathrm{D}(\mathrm{F}^+\mathcal{T}_{\mathrm{c,d}}), \mathrm{D}(\mathbb{Z}_p(1))\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}})$ で定める．ここで $\mathrm{D}(\mathbb{Z}_p(1))$ は $\mathrm{D}_{\mathrm{crys}}(\mathbb{Q}_p(1))$ の canonical lattice とする．

補題 6.2. $1 \le w(\eta) \le w(\eta')+1$ となるような Γ_{c} (*resp.* Γ_{d}) の各数論的指標 η (*resp.* η') に対して次が成り立つ:

$$\left(\mathrm{D}(\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}}/\mathrm{F}^+\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}})/\mathrm{Ker}(\mathrm{Sp}_{\eta,\eta'})\mathrm{D}(\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}}/\mathrm{F}^+\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}})\right)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\overline{V}_{\eta,\eta'}).$$

定理 B . *notation* 等は先の通りとする．剰余表現 $G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathcal{T}_{\mathrm{d}}/\mathfrak{M}_{\mathrm{d}}\mathcal{T}_{\mathrm{d}})$ が既約であると仮定しよう $\mathrm{D}(\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}}/\mathrm{F}^+\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}})$ を上で定義された階数 1 の自由 $\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$-加群とする．$1 \le j \le k-1$ となるような各整数の組 (j,k) をひとつ固定する．このとき，$\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$-線形な準同型:

$$\overline{\Omega}^{(j,k)} : \varprojlim_{s,t}\frac{H^1(\mathbb{Q}_p, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t})} \longrightarrow \mathrm{D}(\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}}/\mathrm{F}^+\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}})$$

で次のようなものが存在する:

1. $\overline{\Omega}^{(j,k)}$ は単射で，$\overline{\Omega}^{(j,k)}\otimes_{\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}}\mathrm{Frac}(\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}})$ が同型となる．
2. Γ_{c} (*resp.* Γ_{d}) の数論的指標 $\eta = \kappa_{\mathrm{c}}^j\chi$ (*resp.* $\eta' = \kappa_{\mathrm{d}}^{k-2}\chi'$) を与えるごとに次の図式が可換になる:

$$\begin{array}{ccc}
\varprojlim_{s,t}\dfrac{H^1(\mathbb{Q}_p, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t})} & \xrightarrow{\overline{\Omega}^{(j,k)}} & \mathrm{D}(\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}}/\mathrm{F}^+\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Pr}_{\eta,\eta'}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sp}_{\eta,\eta'}} \\
\dfrac{H^1(\mathbb{Q}_p, \overline{V}_{\eta,\eta'})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, \overline{V}_{\eta,\eta'})} & \xrightarrow{\overline{E}_{\eta,\eta'}} & \mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\overline{V}_{\eta,\eta'}),
\end{array}$$

ここで $\overline{E}_{\eta,\eta'}$: $\dfrac{H^1(\mathbb{Q}_p, \overline{V}_{\eta,\eta'})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, \overline{V}_{\eta,\eta'})} \longrightarrow \mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\overline{V}_{\eta,\eta'})$ は $\mathbb{Q}_p$-線形な写像:

$$x \longmapsto (j-1)!G(\chi^{-1}\omega^j, \zeta_{p^{s(\chi\omega^{-j})}}) \left(\frac{a_{\eta',p}}{p^{j-1}}\right)^{-s(\chi\omega^{-j})}$$
$$\times \left(1 - \frac{\chi\omega^{-j}(p)a_{\eta',p}}{p^{j-1}}\right)\left(1 - \frac{\chi\omega^{-j}(p)a_{\eta',p}}{p^j}\right)^{-1} \exp^*(x)$$

である ($G(\chi^{-1}\omega^j, \zeta_{p^{s(\chi\omega^{-j})}})$ はガウス和を表す).

第 3 節のはじめに説明された表現 $\mathcal{T}_{\mathrm{d}}$ の Mazur-Wiles によるフィルトレーションによって定理 B は次の命題に帰着される:

命題 6.3. *notation* 等は先の通りとする. 剰余表現 $G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathcal{T}_{\mathrm{d}}/\mathfrak{M}_{\mathrm{d}}\mathcal{T}_{\mathrm{d}})$ が既約であると仮定しよう. $1 \le j \le k-1$ となるような各整数の組 (j,k) をひとつ固定する. このとき, $\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}$-線形な準同型:

$$\overline{\Omega}_+^{(j,k)} : \varprojlim_{s,t} \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t}/\mathrm{F}^+\overline{T}^{(j,k)}_{s,t})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t}/\mathrm{F}^+\overline{T}^{(j,k)}_{s,t})} \longrightarrow \mathrm{D}(\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}}/\mathrm{F}^+\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}})$$

が存在して次をみたす:

1. $\overline{\Omega}_+^{(j,k)}$ は単射で, $\overline{\Omega}_+^{(j,k)} \otimes_{\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}}} \mathrm{Frac}(\mathcal{R}_{\mathrm{c,d}})$ は同型となる.
2. Γ_{c} (*resp.* Γ_{d}) の数論的指標 $\eta = \kappa_{\mathrm{c}}^j\chi$ (*resp.* $\eta' = \kappa_{\mathrm{d}}^{k-2}\chi'$) を与えるごとに次の図式が可換になる:

$$\begin{array}{ccc}
\varprojlim_{s,t} \dfrac{H^1(\mathbb{Q}_p, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t}/\mathrm{F}^+\overline{T}^{(j,k)}_{s,t})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, \overline{T}^{(j,k)}_{s,t}/\mathrm{F}^+\overline{T}^{(j,k)}_{s,t})} & \xrightarrow{\overline{\Omega}_+^{(j,k)}} & \mathrm{D}(\overline{\mathcal{T}}/\mathrm{F}^+\overline{\mathcal{T}}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Pr}_{\eta,\eta'}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sp}_{\eta,\eta'}} \\
\dfrac{H^1(\mathbb{Q}_p, \overline{V}_{\eta,\eta'}/\mathrm{F}^+\overline{V}_{\eta,\eta'})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p, \overline{V}_{\eta,\eta'}/\mathrm{F}^+\overline{V}_{\eta,\eta'})} & \xrightarrow{\overline{E}_{\eta,\eta'}} & \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\overline{V}_{\eta,\eta'}/\mathrm{F}^+\overline{V}_{\eta,\eta'}),
\end{array}$$

ここで $\overline{E}_{\eta,\eta'}:\ \dfrac{H^1(\mathbb{Q}_p,\overline{V}_{\eta,\eta'}/\mathrm{F}^+\overline{V}_{\eta,\eta'})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p,\overline{V}_{\eta,\eta'}/\mathrm{F}^+\overline{V}_{\eta,\eta'})} \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\overline{V}_{\eta,\eta'}/\mathrm{F}^+\overline{V}_{\eta,\eta'})$ は $\mathbb{Q}_p$-線形な写像:

$$x \longmapsto (j-1)!G(\chi^{-1}\omega^j,\zeta_{p^{s(\chi\omega^{-j})}})\left(\frac{a_{\eta',p}}{p^{j-1}}\right)^{-s(\chi\omega^{-j})} \times\left(1-\frac{\chi\omega^{-j}(p)a_{\eta',p}}{p^{j-1}}\right)\left(1-\frac{\chi\omega^{-j}(p)a_{\eta',p}}{p^{j}}\right)^{-1}\exp^*(x)$$

である.

上のような数論的指標 η,η' に対しては $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\overline{V}_{\eta,\eta'}/\mathrm{F}^+\overline{V}_{\eta,\eta'})=\mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\overline{V}_{\eta,\eta'})$ となる. 命題 6.3 をみとめると次のような可換図式がある:

$$\begin{array}{ccccc}
\varprojlim_{s,t}\dfrac{H^1(\mathbb{Q}_p,\overline{T}^{(j,k)}_{s,t})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p,\overline{T}^{(j,k)}_{s,t})} & \xrightarrow{\imath^{(j,k)}} & \varprojlim_{s,t}\dfrac{H^1(\mathbb{Q}_p,\overline{T}^{(j,k)}_{s,t}/\mathrm{F}^+\overline{T}^{(j,k)}_{s,t})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p,\overline{T}^{(j,k)}_{s,t}/\mathrm{F}^+\overline{T}^{(j,k)}_{s,t})} & \xrightarrow{\overline{\Omega}^{(j,k)}_+} & \mathrm{D}(\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}}/\mathrm{F}^+\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{c,d}}) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Pr}_{\eta,\eta'}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Pr}_{\eta,\eta'}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sp}_{\eta,\eta'}} \\
\dfrac{H^1(\mathbb{Q}_p,\overline{V}_{\eta,\eta'})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p,\overline{V}_{\eta,\eta'})} & \longrightarrow & \dfrac{H^1(\mathbb{Q}_p,\overline{V}_{\eta,\eta'}/\mathrm{F}^+\overline{V}_{\eta,\eta'})}{H^1_f(\mathbb{Q}_p,\overline{V}_{\eta,\eta'}/\mathrm{F}^+\overline{V}_{\eta,\eta'})} & \xrightarrow{\overline{E}_{\eta,\eta'}} & \mathrm{Fil}^0\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\overline{V}_{\eta,\eta'})
\end{array}$$

よって定理 B でもとめる写像 $\overline{\Omega}^{(j,k)}$ を $\overline{\Omega}^{(j,k)}_+\circ\imath^{(j,k)}$ によって定義することで, 定理 B が導かれる.

先ののフィルトレーションの様子から命題 6.3 は不分岐表現による twist の差を除いては universal な円分指標の特殊化に対する dual exponential map たちを補間する問題であることがわかる. よってまず $G_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}}$ の表現に問題を制限することで, Coleman power series の理論を用いて $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}$ 上の interpolation を構成することができる. クリスタルの側とガロアコホモロジーの側でともに $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}/\mathbb{Q}_p)$-不変部分を計算することで, もとめる $\mathbb{Q}_p$ 上の結果を得る.

References

[BK] S. Bloch, K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, the Grothendieck Festschrift I, Progress in Math., **86**, 333–400, 1990.

[CP] J. Coates, B. Perrin-Riou, *On p-adic L-functions attached to motives over Q*, Algebraic number theory, 23–54, Adv. Stud. Pure Math., **17**, Academic Press, Boston, MA, 1989.

[Del] P. Deligne, *Formes modulaires et représentations l-adiques*, Séminaires Bourbaki **355**, 139–172, Lecture notes in Math., **179**, Springer Verlag, 1969.

[De2] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 247–289, 1979.

[Fl] M. Flach, *A generalisation of Cassels-Tate pairing*, Jour. reine. angew. Math. **412**, 113–127, 1990.

[Gr1] R. Greenberg, *Iwasawa theory for p-adic representations*, Advanced studies in Pure Math. **17**, 97–137, 1987.

[Gr2] R. Greenberg, *Iwasawa theory for p-adic deformations of motives*, Proceedings of Symposia in Pure Math. **55** Part 2, 193–223, 1994.

[GS] R. Greenberg, G. Stevens, *p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms*, Invent. Math. **111** no. 2, 407–447, 1993.

[H1] H. Hida, *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. Ecole Normal. sup., **19**, 231–273, 1986.

[H2] H. Hida, *Galois representations into* $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ *attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math. **85**, 545–613, 1986.

[Ka1] K. Kato, *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via* B_{dR}. *I*, Arithmetic algebraic geometry, 50–163, Lecture Notes in Math., 1553, Springer, 1993.

[Ka2] K. Kato, *series of lectures on Iwasawa main conjectures for modular elliptic curves*, at Tokyo University, September, 1998.

[Ka3] K. Kato, *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, preprint, 1998.

[KM] N. Katz, W. Messing, *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Invent. Math. **23**, 73–77, 1974.

[Ki] K. Kitagawa, *On standard p-adic L-functions of families of elliptic cusp forms*, p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture, 81–110, Contemp. Math., **165**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[MW] B. Mazur, A. Wiles, *On p-adic analytic families of Galois representations*, Compositio Math. **59**, no. 2, 231–264. 1986.

[O] T. Ochiai, *Iwasawa Main Conjecture for Hida deformation*, preprint, 2000.

[Og] A. Ogg, *On the eigenvalues of Hecke operators*, Math. Ann. **179** 101–108, 1969.

[P1] B. Perrin-Riou, *Théorie d'Iwasawa p-adique locale et globale*, Invent. Math. **99**, no. 2, 247–292, 1990.

[P2] B. Perrin-Riou, *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local*, Invent. Math. bf 115, no. 1, 81–161, 1994.

[R] K. Rubin, *Euler systems*, Annals of Math. Studies **147**,Princeton University Press, 2000.

[T] J. Tate, *Relations between* K_2 *and Galois cohomology*, Invent. Math. **36**, 257–274, 1976.

[Wi] A. Wiles, *On* λ*-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math. **94**, 529–573, 1988.